

# Puentes de madera con estructura recíproca. Análisis comparativo del puente tradicional chino y el puente de Leonardo

## *Timber bridges with reciprocal structure. Comparative analysis of the traditional Chinese bridge and the Leonardo bridge*

José Ramón Aira<sup>(\*)</sup>, Miguel Carlos Cabo-Fernández<sup>(\*\*)</sup>, Federico Luis del Blanco-García<sup>(\*\*\*)</sup>, Laura Gonzalo-Calderón<sup>(\*\*\*\*)</sup>

### RESUMEN

En las últimas décadas las estructuras recíprocas han encontrado una nueva utilidad vinculada a la ejecución de obras temporales y reciclables en línea con las tendencias actuales en arquitectura sostenible. El objetivo de este trabajo consiste en analizar el comportamiento de puentes de madera con estructura recíproca. Se realizó un modelo numérico y se compararon las respuestas estructurales del puente tradicional chino y el puente desmontable de Leonardo. El modelo se verificó midiendo la deformación de un puente real construido en taller. Además del comportamiento mecánico se estudió el mecanismo de transmisión de cargas, la influencia del rozamiento, la estabilidad lateral y la robustez. El puente chino trabaja fundamentalmente a compresión, acercándose más al comportamiento de un arco funicular, y transmitiendo una carga horizontal en los apoyos del orden de tres veces mayor que el puente de Leonardo, que trabaja fundamentalmente a flexión y con niveles de agotamiento y deformación mayores.

**Palabras clave:** estructura recíproca; puente de madera; construcción tradicional; arquitectura sostenible; taller de carpintería.

### ABSTRACT

*During the last decades reciprocal structures have found a new purpose linked to the execution of temporary and recyclable projects in relation with current trends in sustainable architecture. The objective of this work is to analyze the behaviour of timber bridges with reciprocal structure. A numerical model was made and the structural behavior of a traditional Chinese bridge and Leonardo's removable bridge were compared. The model was verified by measuring the deformation of a real bridge built in a workshop. In addition to the mechanical behavior, the load transmission mechanism, the influence of friction, lateral stability and robustness were studied. The Chinese bridge works mainly in compression, getting closer to the behavior of a funicular arch and transmitting a horizontal load on the supports around three times greater than the Leonardo bridge. The latter works fundamentally on bending and subjected to stresses and deformations closer to its ultimate limits.*

**Keywords:** reciprocal structure; timber bridge; traditional construction; sustainable architecture; carpentry workshop.

(\*) Dr. Ingeniero de Montes. Profesor Ayudante Doctor. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

(\*\*) Dr. Arquitecto. Profesor Titular. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

(\*\*\*) Dr. Arquitecto. Profesor Asociado. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

(\*\*\*\*) Arquitecta. Profesora Asociada. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

**Persona de contacto/Corresponding author:** [joseramon.aira@upm.es](mailto:joseramon.aira@upm.es) (José-Ramón Aira Zunzunegui)

**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-4598-5259> (José-Ramón Aira); <http://orcid.org/0000-0002-3393-2774> (M.C. Cabo-Fernández); <https://orcid.org/0000-0002-7907-6643> (F.L. del Blanco-García); <http://orcid.org/0000-0002-0105-5850> (Laura Gonzalo-Calderón).

---

**Cómo citar este artículo/Citation:** José Ramón Aira, Miguel Carlos Cabo-Fernández, Federico Luis del Blanco-García, Laura Gonzalo-Calderón (2022). Puentes de madera con estructura recíproca. Análisis comparativo del puente tradicional chino y el puente de Leonardo. *Informes de la Construcción*, 74(565): e430. <https://doi.org/10.3989/ic.85874>

**Copyright:** © 2022 CSIC. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Recibido/Received: 04/11/2020  
Aceptado/Accepted: 08/06/2021  
Publicado on-line/Published on-line: 25/03/2022

## 1. ANTECEDENTES

### 1.1. Estructuras recíprocas

En una estructura ordinaria, la transmisión de cargas entre elementos es clara ya que responde a una jerarquía acorde a los órdenes estructurales establecidos en el propio diseño. En una estructura recíproca, la transmisión de cargas no es tan intuitiva. Así, cada elemento recibe una carga exterior que es transmitida a los elementos adyacentes, al igual que en una estructura ordinaria. Sin embargo, la diferencia radica en que parte de esta carga transmitida vuelve como carga actuante que deberá transmitirse de nuevo. El proceso es iterativo, de modo que la carga transmitida va reduciéndose cada vez más hasta llegar a cero.

Las estructuras recíprocas son utilizadas desde hace siglos porque surgieron como una solución ingeniosa y económica cuando se pretendía cubrir grandes luces mediante elementos de pequeña longitud y escuadría (1, 2). Su uso también estaba relacionado con la necesidad de realizar montajes y desmontajes muy rápidos, como ha sido el caso de la construcción de puentes en situaciones de conflicto bélico. Con el tiempo, su aplicación fue cayendo en desuso paulatinamente debido a la aparición en el mercado de nuevos materiales y sistemas constructivos capaces de alcanzar progresivamente mayores luces y alturas.

La mayor parte del desarrollo del conocimiento sobre las estructuras recíprocas se ha realizado dentro de la cultura china. Existen textos históricos en chino de carpintería de armar, como el tratado *Yingzao Fashi* escrito por Li Jie (1065–1110), pero no han sido traducidos a otras lenguas, lo que ha dificultado la investigación bibliográfica y su difusión en occidente. La tradición sigue viva en China como puede apreciarse en la obra del arquitecto Wang Shu (premio Pritzker 2012). Algunas de sus obras, como *Wa Shan Guesthouse* o el *Lin'an Museum*, atestiguan la pervivencia de la tradición en estructuras recíprocas.

En las últimas décadas este tipo de estructuras ha encontrado una nueva utilidad vinculada a la ejecución de obras temporales y reutilizables en situaciones de emergencia social, causadas por desastres naturales o pandemias. Por otro lado, el empleo de un material eficiente como la madera está muy alineado con las nuevas tendencias en arquitectura sostenible. Aparecen así, en la bibliografía científica, varios ejemplos de construcciones recíprocas tridimensionales que demuestran este nuevo renacer (3-7).

Parte de la bibliografía analiza las estructuras recíprocas desde un punto de vista principalmente arquitectónico (8) aunque la mayoría de los trabajos de investigación se desarrollan en el campo del análisis geométrico y estructural, bien sobre edificios históricos (9) o bien sobre estructuras contemporáneas (10). En este marco tipológico conviene hacer referencia a las estructuras de tubos conectados con abrazaderas, por el parecido en el comportamiento estructural con los puentes de estructura recíproca, donde se utilizan ligaduras o sogas para asegurar las uniones (11, 12).

### 1.2. Puente tradicional chino y puente desmontable de Leonardo

Los tratados chinos de madera que han llegado hasta nosotros se remontan al periodo comprendido entre los siglos XI y XIII,

y reflejan el gran conocimiento de la carpintería de armar en China (13, 14). En este país existe una tradición muy antigua sobre la utilización de modelos de estructura recíproca aplicados a la construcción de puentes mediante rollizos de madera simplemente descortezados (15). La pervivencia de la tradición entre carpinteros de armar ha permitido conservar los modos ancestrales de labra de uniones y métodos de montaje para construir este tipo de puentes (16, 17), como lo demuestra el proyecto de recreación de un puente histórico conocido como *Rainbow Bridge* o *Xianju bridge* (18). La reconstrucción histórica se basa en la imagen conservada en la representación de un puente del siglo XII bajo la dinastía Song. El perfil es un sector de arco de circunferencia rebajado ( $96^\circ$ ) de 9.00 m de radio que se ejecuta con rollizos de 18 cm de diámetro.

La mayor parte de las fuentes consultadas sobre el puente desmontable de Leonardo atribuyen sistemáticamente su autoría al propio Leonardo da Vinci (1452-1519), por la presencia en sus dibujos recogidos en el *Codex Atlanticus*, f. 69ar y 71v (1487-1489). En la bibliografía científica aparecen varias referencias sobre los puentes y cubiertas de Leonardo y sus máquinas recogidas en diversos dibujos del genio renacentista (19). En algún caso en particular (20) se realiza la inevitable comparación con los puentes chinos, aunque no se comenta la más que posible inspiración que Leonardo pudo encontrar al estudiar los modelos tradicionales de puentes chinos. Conviene recordar que en la época de Leonardo era habitual copiar ideas e incluso textos completos de otros autores sin indicar la procedencia. Esta costumbre fue habitual en la historia conocida y permanece hasta casi finales del siglo XVIII, por lo que parece bastante lógico, por la diferencia cronológica, que Leonardo se inspirara en los puentes chinos y no viceversa.

Por otra parte, la ruta de la seda siempre permaneció abierta como ruta de información oriente-occidente y especialmente ésta cobró alto interés por parte de los comerciantes venecianos. Entre los viajeros que conectaban los dos mundos es bien conocida la figura de Marco Polo y sus viajes, que compila en una publicación al regreso a su Venecia natal *Libro de las maravillas del mundo* (21). En él se hace un relato que recoge parte de la experiencia de su viaje a la corte de Kublai Kan (1271-1295) donde habla de grandes ciudades y de la presencia de 12.000 puentes, lo que muestra la tradición experta de los chinos en hacer puentes. La inmensa mayoría se construían en madera porque en gran parte de la China central es el material más abundante, siendo la piedra difícil de conseguir. En este marco histórico, es bastante probable que Leonardo tuviera conocimiento de estos puentes de madera a través de comerciantes venecianos, ya que también residió algún tiempo en Venecia.

La originalidad de Leonardo pudiera atribuirse principalmente a la aplicación, y no tanto al propio diseño, de este tipo de estructuras, es decir, al uso militar como puente desmontable y transportable para salvar arroyos, ríos o accidentes del terreno de pequeña entidad.

Experiencias similares al modelo de puente de Leonardo aquí presentado se han realizado en otras universidades o centros de investigación en formato de taller. Algunos son simples trabajos de taller colectivos (22) y otros corresponden a experimentos personales (23). Aparecen también trabajos con variantes inspiradas en el puente Leonardo en las que se sustituyen los arcos de rollizos por marcos de tabloneros en un formato triangular (24).

### 1.3. Tipología estructural

Tras la realización de un análisis iniciático y visual de la disposición geométrica de los elementos que configuran ambos puentes, parece conveniente diferenciar dos tipos básicos de puente con estructura recíproca de barras entrelazadas.

En los puentes tradicionales chinos, además de utilizar el pinzamiento de las barras del arco con las transversales, se utiliza la carga en punta de las barras del arco, es decir, se busca la continuidad estructural para que trabaje de la forma más parecida a un arco. Ello se consigue mediante dos estrategias, por un lado, las barras del arco se conectan con las siguientes por las testas proporcionando continuidad al pórtico que permanece en el mismo plano y, por otro lado, se juntan varios arcos lateralmente trabados por piezas transversales donde las uniones se refuerzan con sogas (habitualmente de bambú) consiguiendo una trabazón similar a un tejido de cestería que rigidiza enormemente el conjunto.

En el diseño de Leonardo, y tal vez sea esa su principal novedad, no se utiliza la continuidad en testa de las barras del arco, de modo que el pinzamiento sobre las barras transversales sirve simplemente para ejecutar la unión. El uso de posibles cuerdas o sogas en los nudos solo cumple la función de mantener los elementos en contacto, y con ello la geometría del puente, pero sin una función estructural clara. Por tanto, en el diseño de Leonardo las piezas podían deslizarse entre sí en los encuentros de los nudos dejando al rozamiento gran parte de la responsabilidad estructural. Leonardo tampoco aclara la gran ventaja de coaccionar el deslizamiento de los apoyos extremos para evitar grandes deformaciones.

En algunos modelos realizados con rollizos se practica un rebaje de sección semicircular en el extremo de las barras del arco, con el objeto de encajar las barras transversales y evitar su deslizamiento. Esto favorece que las barras trabajen por punta, acercándose al comportamiento del puente tradicional chino, pero es perjudicial para la barra del arco porque pierde la mitad de su sección resistente.

### 1.4. Génesis de la idea

El presente trabajo surge a raíz de la asignatura Taller Experimental de Carpintería de Armar de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid (Universidad Politécnica



Figura 1. Puente ejecutado en taller. Todos los dibujos, imágenes y fotografías son de los autores.

de Madrid). La idea consistía en buscar una variación muy sencilla de un puente tradicional chino, parecido al que recoge Leonardo Da Vinci en su *Codex Atlanticus*, llegando a una simplificación de dicho puente reduciendo los pórticos a dos arcos paralelos, figura 1.

## 2. OBJETIVOS

El objetivo general de esta investigación consiste en analizar y entender el comportamiento mecánico de puentes de madera con estructura recíproca, figura 2. Para ello se realiza una comparación del comportamiento del puente tradicional chino y del puente desmontable de Leonardo.

Como objetivos secundarios, se pretende averiguar el mecanismo de transmisión de cargas entre elementos, así como la importancia del rozamiento de las piezas en la respuesta estructural y la forma de implementarlo en un modelo numérico.

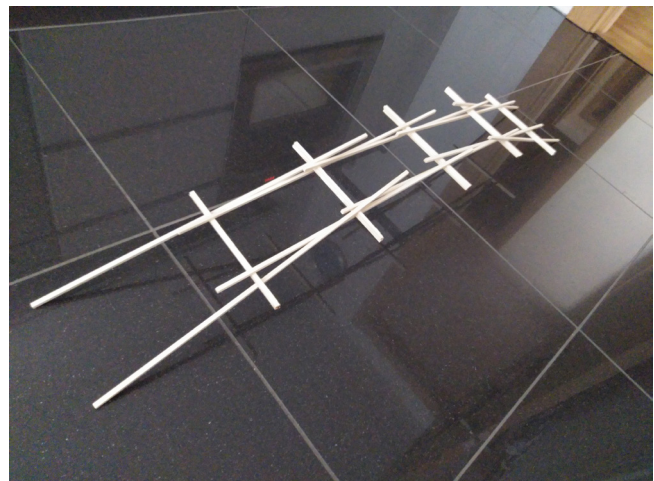


Figura 2. Recreación de puente con estructura recíproca.

## 3. MATERIAL Y MÉTODOS

### 3.1. Material

El material de ensayo consiste en un puente de estructura recíproca construido en taller, figura 1. Las piezas son de madera de abeto (*Picea abies* (L.) Karst.) de clase resistente C16 con 2 escuadrías diferentes. Los elementos longitudinales que forman los arcos del puente y las diagonales de estabilización lateral tienen una sección de 3x7 cm y una longitud de 3 m. Los elementos transversales, sobre los que apoyan los longitudinales, tienen una sección de 4x4 cm y una longitud de 1.12 m. El puente tiene una longitud total (o luz) de 8.24 m, y una altura en la clave (o flecha) de 1.03 m.

El puente se construyó mediante la formación de 2 arcos gemelos con barras de madera que se van solapando y trabando con otras transversales. La separación entre los arcos es arbitraria y depende de la longitud de las barras transversales utilizadas. Se colocó además una barra diagonal a cada extremo de la estructura para asegurar la estabilidad lateral ante posibles empujes imprevistos. La distancia de separación entre arcos podría reducirse al mínimo, quedando los arcos adosados y formando una superficie continua que serviría de base o tablero de puente, como ocurre en los puentes tradi-

cionales chinos realizados con troncos y cubiertos con tierra para formar el suelo de paso o tablero del puente.

Es importante resaltar la facilidad y rapidez de ejecución de la obra y la ausencia de utilización de apeos o medios auxiliares. El peso total de la estructura es de 23 kg para salvar una luz de 8.24 m, lo que habla claramente de su ligereza en relación a la luz alcanzada, aunque solo se haya considerado el peso propio. Inicialmente el conjunto de la estructura se ensambló sin ningún elemento de fijación en las uniones entre piezas, quedando éstas coaccionadas simplemente por el propio rozamiento entre ellas. Además, los apoyos extremos se dejaron como deslizantes sin que ningún elemento evitase la apertura libre de los arcos.

Las ventajas e inconvenientes derivadas del modelo de arco ejecutado tienen que ver con su condición de estructura recíproca. Así, como ventajas se pueden indicar que las barras de madera utilizadas son producidas industrialmente en un modelo de prefabricación abierto, el diseño de arco se ha ejecutado sin ninguna operación de corte o labra; o que el sistema permite alcanzar luces superiores a la longitud de barras sin precisar uniones atornilladas o encoladas. Como inconveniente principal se puede indicar el habitual en las estructuras recíprocas de este tipo, es decir, su falta de robustez, en términos mecánicos, debido a que el fallo o rotura de cualquiera de las piezas conlleva el colapso total de la estructura.

### 3.2. Modelo numérico

El modelo numérico de la estructura del puente se desarrolla con el software Dlubal RFEM<sup>®</sup> en su versión 5.23. Se trata de un programa empleado tanto para investigación como para el cálculo de estructuras a nivel profesional. Utiliza la aproximación numérica por elementos finitos para calcular los esfuerzos internos, deformaciones y reacciones en los apoyos de una estructura con geometría sencilla o compleja.

De cara a analizar las diferencias entre el puente chino y el puente de Leonardo, ambos se estudian bajo el mismo diseño, el diseño ejecutado en taller, variando únicamente las coacciones de los extremos de las barras. Se discretiza como un sistema de nudos y barras utilizando elementos finitos unidimensionales con 6 grados de libertad, 3 en cada uno de los extremos.

El diseño ejecutado en taller se corresponde exactamente con el puente de Leonardo, es decir, permite la articulación y el

deslizamiento entre piezas por lo que es necesario definir correctamente el fenómeno del rozamiento. Así, el rozamiento entre los elementos en contacto se establece al introducir las propiedades de contacto. Para ello, se considera una barra apoyada, en su parte inferior, sobre otra barra, figura 3.

Ante cualquier carga axial  $N$  que actúa sobre la primera, aparecerá una fuerza de rozamiento entre barras, de módulo  $\mu_x \cdot Vz$ , que impide el deslizamiento relativo en la dirección  $x$ , siendo  $Vz$  el cortante en la dirección local  $z$ . El deslizamiento entre barras estará impedido hasta que se supere la fuerza de rozamiento. Para ello se considera un coeficiente de rozamiento estático entre piezas de madera de abeto de 0,47 (25) obtenido mediante un dispositivo diseñado exclusivamente para ello donde se considera la dirección de la fibra (26). Aunque la carga  $N$  no supere el valor de la fuerza de rozamiento, las barras se deforman un valor que viene dado por  $C_{ux}$ . Aplicando la ley de Hooke es posible obtener el coeficiente  $C_{ux}$  que relaciona la fuerza que es necesaria aplicar, en Newton, para alargar la barra 1 mm.

$$[1] \quad C_{ux} = F/\Delta L = (S \cdot E)/L$$

Donde,

- $F$  fuerza axial que actúa sobre la barra
- $L$  longitud inicial de la barra
- $E$  módulo de elasticidad del material
- $S$  sección resistente de la barra

Considerando  $E = 8000 \text{ N/mm}^2$ , correspondiente a una clase resistente C16 según la UNE-EN 338:2017 (27),  $S = 30 \times 70 \text{ mm}^2$  y  $L = 3 \text{ m}$ , se obtiene  $C_{ux} = 5600 \text{ N/mm}$ .

Se estudia el mecanismo de transmisión de cargas entre barras, la influencia del rozamiento, la respuesta estructural, la estabilidad lateral y la robustez.

La influencia del rozamiento se analiza con el puente trabajando como viga (apoyos articulados en un extremo y deslizantes en el otro), y como arco (apoyos articulados en ambos extremos). Se consideran 3 tipos de contacto diferentes: sin rozamiento (las barras giran y deslizan libremente entre sí), puente chino (las barras giran libremente pero no existe deslizamiento entre ellas), y puente de Leonardo (las barras giran libremente y deslizan con un coeficiente de rozamiento de 0.47).

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Verificación del modelo

El modelo del puente de Leonardo trabajando como viga (y no como arco) era el que más deformación sufría y el que tenía un comportamiento estructural más complejo. Por ello, el diseño ejecutado en taller se corresponde con el puente de Leonardo y fue el que se utilizó para verificar el modelo numérico.

Así, la verificación del modelo de elementos finitos consistió en comparar la deformación que sufrió el puente real construido en taller y la deformación del modelo numérico bajo la acción de su peso propio. No se consideró ningún tipo de coacción en las uniones ni en los apoyos extremos, por lo que la deformación libre del puente solo estaba impedida por el rozamiento entre piezas.

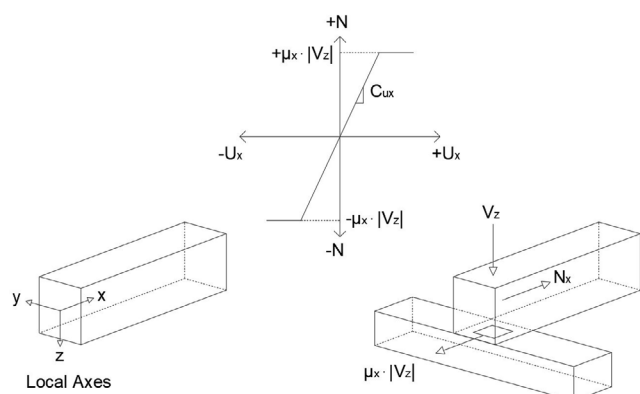


Figura 3. Esquema del rozamiento entre piezas.

Una vez montado en taller, la clave del puente descendió 10.5 cm y los extremos se abrieron 6.1 cm. En el modelo numérico el descenso de la clave resultó ser de 11.4 cm y la apertura de los extremos de 6.6 cm. Como las diferencias entre las deformaciones reales y las del modelo fueron pequeñas, se determinó que éste era adecuado para el estudio que se pretendía realizar.

#### 4.2. Transmisión de cargas

Una carga aplicada sobre una estructura recíproca se transmite progresivamente por todas sus barras mediante un proceso de reparto que hace que la carga vuelva a la barra sobre la que se aplica, y deba ser repartida de nuevo. En el caso particular del puente recíproco, suponiendo que se aplica una carga vertical puntual sobre una de las barras, figura 4, la barra que recibe la carga se apoya en las dos barras contiguas, y cada una de éstas en la siguiente barra y en la primera, lo cual aumenta la carga inicial en ella, que debe ser de nuevo repartida. Así ocurre en todas las barras del puente hasta llegar a los apoyos. En cada iteración, la carga transmitida se va reduciendo hasta alcanzar al equilibrio cuando ésta llega a cero. Con el fin de poder cuantificar el mecanismo de transmisión de carga, en este análisis se plantea la situación final de equilibrio teniendo en cuenta que las reacciones verticales en los apoyos son conocidas.

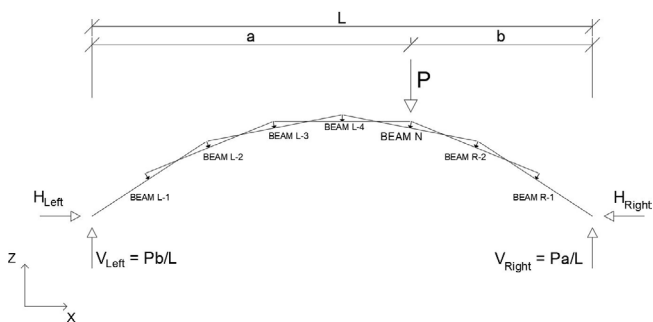


Figura 4. Esquema de carga aplicada descentrada.

Si sobre una barra cualquiera,  $N$ , se aplica una carga vertical  $P$ , siendo  $a$ , la distancia al apoyo de la izquierda, y  $b$ , al de la derecha, se inicia el proceso iterativo de reparto. Cuando se llegue al equilibrio, las reacciones verticales serán  $V_{Left} = Pb/L$  y  $V_{Right} = Pa/L$ , y las horizontales  $H_{Left} = H_{Right}$ . Considerando que el puente es bastante tendido, la longitud de cada una de las barras es prácticamente igual a su proyección sobre el eje  $X$ , de tal forma que en el ejemplo  $a=5L/8$  y  $b=3L/8$ . Con estas hipótesis se procede a analizar el equilibrio en cada una de las barras, partiendo de los apoyos y hasta llegar al punto de aplicación de la carga, figura 5.

Estudiando el equilibrio de cargas verticales en la barra  $L-1$  (primera desde la izquierda), resulta que se trata de una viga biapoyada con carga centrada, procedente de  $L-2$ , por lo que las reacciones en sus apoyos son iguales, y la carga aplicada el doble. Llevando estos valores a la barra  $L-2$ , se obtiene el valor de la carga procedente de  $L-3$ , puesto que la que procede de  $L-1$  ya es conocida. Se aplica el mismo sistema a cada uno de los lados de la barra  $N$ , en la que se aplica la carga  $P$ .

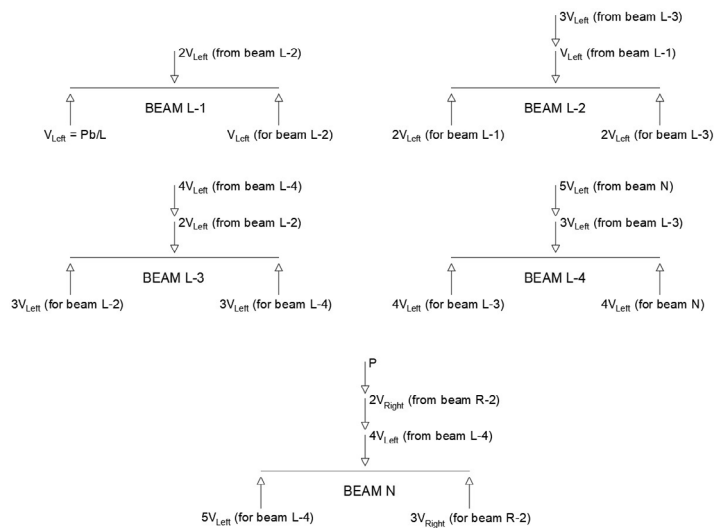


Figura 5. Esquema de reparto de cargas.

La barra  $N$ , sería la 5ª barra desde la izquierda y la 3ª desde la derecha, por lo que transfiere a las barras contiguas, respectivamente,  $5V_{Left}$  y  $3V_{Right}$ , y recibe de ellas  $4V_{Left}$  y  $2V_{Right}$ . Considerando además la carga  $P$ , el sistema está en equilibrio, porque  $P = V_{Left} + V_{Right}$  y  $5V_{Left} = 3V_{Right}$  ya que  $b=3a/5$ .

Observando el reparto de cargas es posible sacar las siguientes conclusiones:

- La carga vertical que recibe una barra cualquiera, a uno de los lados del punto de aplicación, es igual a  $2nV$ , siendo  $n$  el lugar que ocupa la barra desde el apoyo correspondiente y  $V$  la reacción vertical en ese apoyo (ej: Barra  $L-2$ , carga  $4V_{Left}$ ).
- La carga vertical que recibe la barra en la que se aplica la carga es igual a  $P + n_{Left}V_{Left} + n_{Right}V_{Right}$ , siendo  $n$  el número de barras que existe a cada lado de la barra  $N$ , sin contar con ésta.

Por tanto, la naturaleza recíproca de la estructura conlleva que las barras aumenten considerablemente la carga vertical que deben soportar, siendo la barra que recibe la carga del exterior, la que más aumenta. Además, cuanto mayor es el número de barras, mayor es el aumento de la carga.

Si en lugar de aplicar la carga  $P$  descentrada, ésta se aplica en el centro del arco, se obtendría que:

- La reacción vertical en cada apoyo es  $P/2$ .
- La carga soportada por las barras más exteriores es  $2 \times 1 \times P/2 = P$ .
- La carga soportada por las segundas barras es  $2 \times 2 \times P/2 = 2P$ .
- La carga soportada por la barra central que recibe la carga es  $P + 2 \times P/2 + 2 \times P/2 = 3P$ .

#### 4.3. Influencia del rozamiento

La estructura del puente se deforma de forma diferente dependiendo de los apoyos en sus extremos y de la unión entre elementos. En la tabla 1 se muestra, para los casos estudiados, el descenso vertical de la parte superior (clave) y el desplazamiento horizontal de los apoyos.

**Tabla 1.** Deformación del puente ante su peso propio (descenso de la parte superior según el eje z, y abertura de los apoyos extremos según el eje x).

	Trabajando como viga (apoyo 1: articulación, apoyo 2: deslizadera)	Trabajando como arco (apoyos 1 y 2: articulación)
Sin rozamiento (uniones articuladas con deslizamiento, coeficiente de rozamiento igual a 0)	mecanismo	mecanismo
Puente chino (uniones articuladas sin deslizamiento, coeficiente de rozamiento igual a 1)	$z = - 113.6 \text{ mm} / x = 66.4 \text{ mm}$	$z = - 0.5 \text{ mm}$
Puente de Leonardo (uniones articuladas con deslizamiento, coeficiente de rozamiento igual a 0,47)	$z = - 114.0 \text{ mm} / x = 65.8 \text{ mm}$	$z = - 76.4 \text{ mm}$

Se observa que el puente se comporta como un mecanismo cuando no se considera ningún tipo de rozamiento entre las piezas que lo forman, dejando que giren y deslicen libremente entre sí.

Cuando el puente trabaja como viga no existe una relevancia importante en cuanto a considerar el rozamiento entre piezas o no considerarlo. Al estar permitido el desplazamiento horizontal en uno de los extremos, el puente solamente tiene reacciones verticales, y se va abriendo al recibir la carga alcanzando grandes deformaciones, tanto en la dirección z (vertical) como en la dirección x (longitudinal), simplemente por la acción de su peso propio. Este comportamiento no es el más adecuado debido a la falta de rigidez de la estructura.

Cuando el puente trabaja como arco aparecen reacciones horizontales debido a que queda impedido el desplazamiento horizontal en sus extremos. Las deformaciones son mucho menores que cuando trabaja como viga debido a que el puente tiene mayor rigidez. Además, si en lugar de dejar simplemente que las piezas transmitan las cargas por el rozamiento propio del material, se articulan impidiendo su deslizamiento, el puente incrementa mucho más su rigidez, reduciendo la deformación de su clave considerablemente (0.5 mm frente a 76.4 mm).

#### 4.4. Comportamiento estructural

En la figura 6 se muestra la geometría del modelo (planta y alzado) y las cargas consideradas (peso propio).

En la nomenclatura habitual de arcos y al tratarse de un arco simétrico, se denomina luz a la distancia horizontal entre los

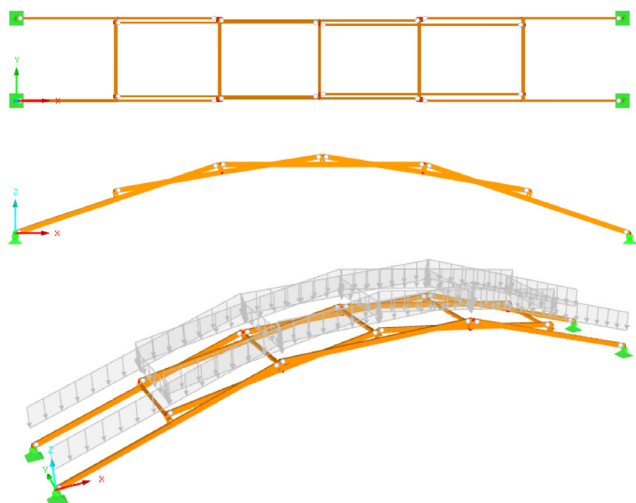


Figura 6. Planta, alzado y carga por peso propio del modelo.

apoyos, y flecha a la distancia vertical máxima desde la línea que une los extremos y la clave (o punto más alto de la directriz del arco). El rebajamiento viene dado por la razón entre la flecha del arco y su luz. Cuanto menor sea el rebajamiento, el arco será más tendido y mayor será el empuje sobre los estribos. El valor más adecuado del rebajamiento depende del criterio del proyectista. Sin embargo, desde un punto de vista mecánico, el arco alcanza su máxima eficacia cuando su directriz sigue el funicular de cargas porque las barras trabajarían solamente a esfuerzos axiales. Además, en este caso, la resultante sobre el arranque del arco seguiría la tangente a la directriz del mismo.

Algunos autores sitúan el valor óptimo del rebajamiento entre 0.20 y 0.43 (28). En el modelo ensayado, el rebajamiento es  $1.03/8.24 = 0.125$ , con una estética bastante tendida, que facilita el tránsito superior de personas o vehículos, pero lejos de seguir la curva funicular, por lo que las barras están sometidas a axiles, cortantes y momentos flectores.

La figura 7 muestra la deformación global de ambos puentes, así como las reacciones en los apoyos. El puente chino sufre una deformación mucho más pequeña que el puente de Leonardo y más cercana a la que sufriría un arco sometido a su peso propio. Los extremos se van arriñonando y descendiendo incluso en mayor proporción que la propia clave (1 mm frente a 0.5 mm en la clave). En cambio, en el puente de Leonardo la clave desciende más que cualquier otro punto (76.4 mm) y las barras sufren un pequeño des-

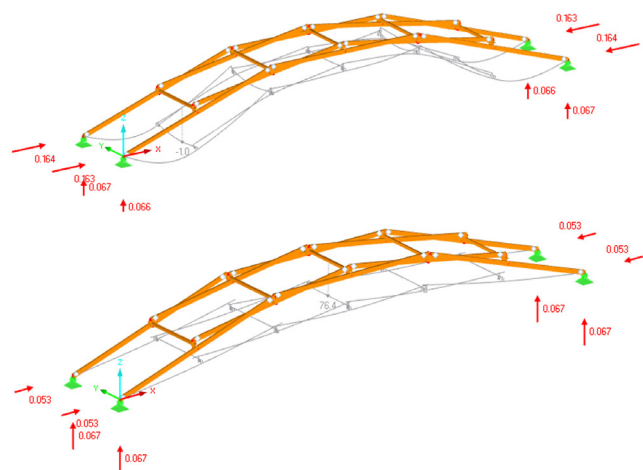


Figura 7. Deformación y reacciones en los apoyos. Puente chino (arriba), deformación (amplificada x500) (mm) y reacciones en los apoyos (kN). Puente de Leonardo (abajo), deformación (amplificada x7) (mm) y reacciones en los apoyos (kN).

lizamiento entre ellas, debido al rozamiento en las superficies de contacto, que reduce la curvatura del arco. Por ello, actualmente es común encontrar pequeñas estructuras tipo puente recíproco donde se han colocado tirafondos o mecanizado muescas cerca de los extremos de las piezas con el objeto de favorecer su montaje y reducir su deformación.

Las reacciones verticales en los apoyos de ambos puentes son iguales, pero las reacciones horizontales del puente chino son alrededor de 3 veces mayores que las del puente de Leonardo (0.164 kN frente a 0.053 kN).

El diseño modelizado está formado por 2 arcos, uno en cada extremo. A su vez, cada uno de los arcos está formado por barras trabadas con sus adyacentes, pudiendo distinguir 2 subestructuras interconectadas, una de tipo pórtico con 4 articulaciones que llega a los extremos, y otra de tipo pórtico triarticulado. Las figuras 8, 9 y 10 muestran la distribución de esfuerzos de estas subestructuras.

Bajo la acción del peso propio se aprecia que todas las barras del arco trabajan a compresión, como cabría esperar en el comportamiento de un arco común, siendo las piezas de los extremos las más solicitadas. Comparando ambos puen-

tes, el puente chino tiene niveles de compresión mayores que el puente de Leonardo, siendo éstos del orden de más del doble en cualquiera de las barras.

Todas las barras están sometidas también a cortante y a momento flector. Los momentos flectores se van alternando de forma que cuando una barra de un pórtico está sometida a su flector máximo, la otra subestructura no tiene momento en ese punto, por tratarse de una unión articulada. Por ello, a pesar de las numerosas articulaciones que existen en las conexiones entre barras, no hay ningún punto del arco donde no se transmitan momentos flectores. Por tanto, el comportamiento global de la estructura se podría asemejar al de un arco hiperestático de grado 1.

Al contrario de lo que sucede con los esfuerzos de compresión, los momentos y cortantes son mucho menores en el puente chino, donde la distribución curva de los momentos indica que prevalece la acción uniformemente distribuida del peso propio. Cabe señalar el momento negativo que presentan las barras del pórtico triarticulado debido a que las barras del otro pórtico transmiten un pequeño levantamiento en sus extremos a través de la unión. Además, la asimetría de las barras longitudinales que confluyen en la barra transversal

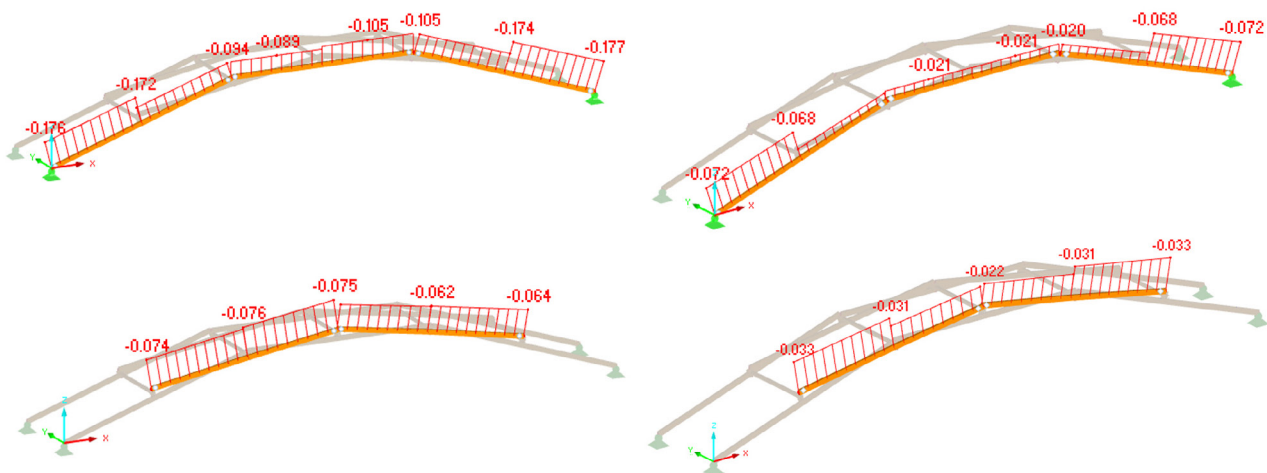


Figura 8. Puente chino (izquierda) y puente de Leonardo (derecha). Esfuerzos Internos. Distribución de axiles (kN).

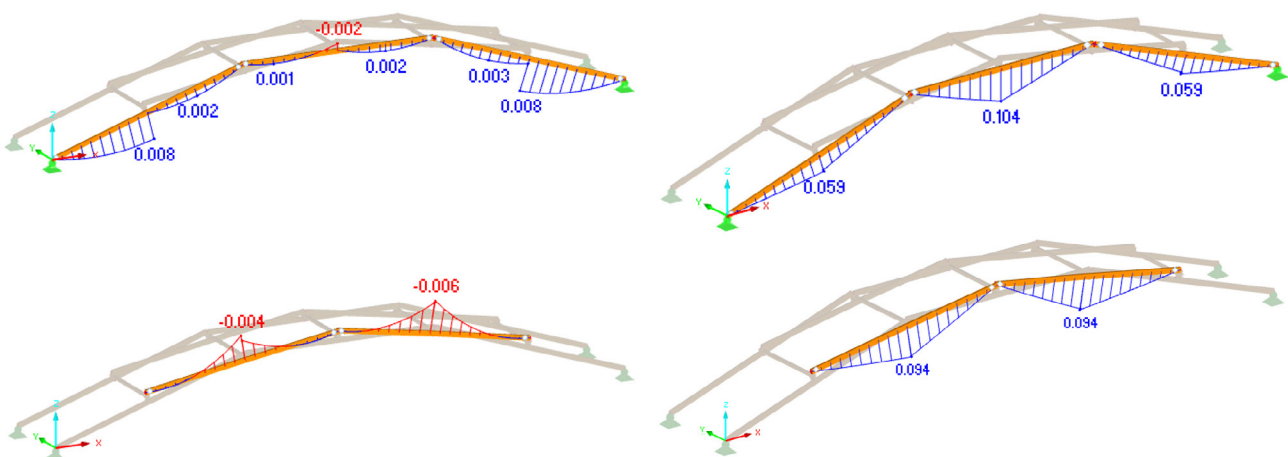


Figura 9. Puente chino (izquierda) y puente de Leonardo (derecha). Esfuerzos Internos. Distribución de momentos flectores (kN.m).

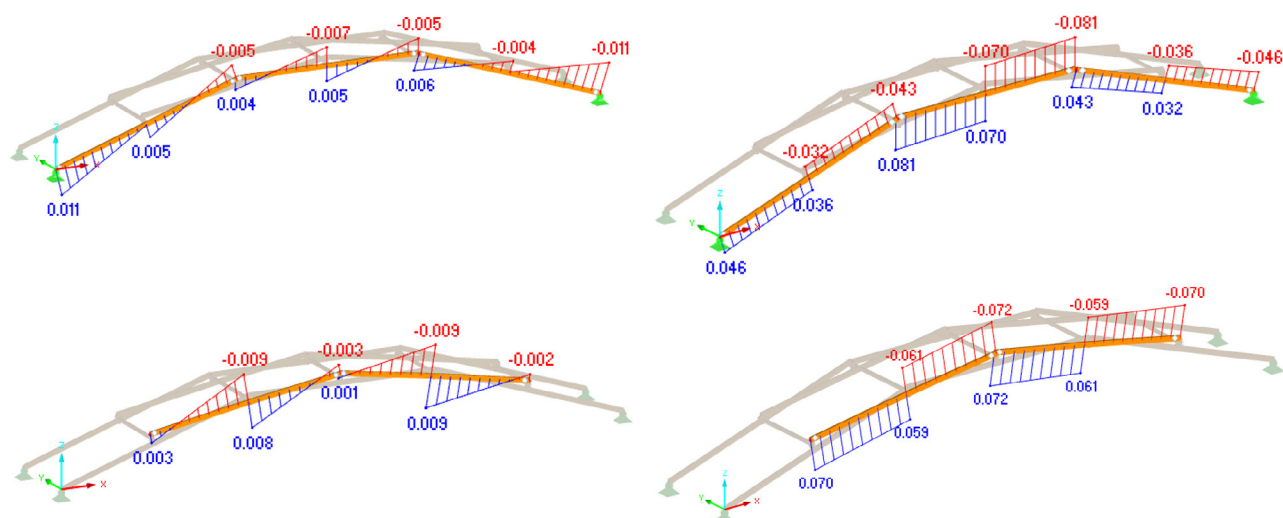


Figura 10. Puente chino (izquierda) y puente de Leonardo (derecha). Esfuerzos Internos. Distribución de cortantes (kN).

central, provoca la torsión de ésta que se transmite al pórtico de 4 articulaciones causando un pequeño momento negativo. En el puente de Leonardo, los momentos y cortantes son mucho más relevantes, notándose el efecto de la transmisión de cargas puntuales entre pórticos, y dando lugar a distribuciones de momento prácticamente triangulares.

Por otra parte, en el puente chino el pórtico de 4 articulaciones soporta la mayor parte de las compresiones, adquiriendo una mayor responsabilidad estructural que el pórtico de 3 articulaciones, que quedaría más relegado a una labor de refuerzo y mantenimiento de la geometría. En cambio, en el puente de Leonardo no existe esa diferenciación funcional, siendo los 2 pórticos responsables por igual de la resistencia del conjunto. Desde este punto de vista se podría decir que el puente chino no sigue el comportamiento esperado de una estructura recíproca donde todas las barras tienen una jerarquía estructural similar.

Respecto al agotamiento de las secciones, considerando una situación en la que actúan únicamente las acciones debidas al peso propio, en el puente chino las barras más agotadas son las de los extremos, trabajando a compresión y con un nivel de agotamiento del 16%. En el puente de Leonardo, las barras más agotadas son las centrales (en posición horizontal), trabajando a flexión y con un nivel de agotamiento del 58%.

En una situación real habría que seguir las directrices de la norma IAP-11 (29), la cual, para una pasarela peatonal donde se puedan prever aglomeraciones de personas, aplica una carga de uso uniforme de  $5 \text{ kN/m}^2$ . Despreciando la carga de nieve y de viento, para este análisis comparativo, además de la carga de uso la pasarela deberá soportar el peso propio del tablero (estimado en  $0,5 \text{ kN/m}^2$ ) y de la estructura. En esta situación, el puente chino necesitaría unas piezas longitudinales de sección  $100 \times 160 \text{ mm}$  y transversales de  $100 \times 100 \text{ mm}$ , y el puente de Leonardo unas piezas de sección  $200 \times 280 \text{ mm}$  y  $100 \times 100 \text{ mm}$ , respectivamente.

#### 4.5. Estabilidad lateral y robustez

Los problemas que pudieran surgir de la estabilidad lateral del puente son los mismos que aparecen en otro tipo de es-

tructuras similares con desarrollo en un solo plano (como arcos, pórticos o cerchas) donde es necesario arriostrar el elemento en la dirección perpendicular al mismo. En este sentido, la colocación de diagonales o tableros que unan ambos arcos contribuye, sin duda, a mejorar su estabilidad lateral. Del mismo modo, un diseño del puente que aumente la distancia entre los arcos en los apoyos, como se aprecia en la figura 2, mejora la estabilidad lateral porque aumenta el brazo del momento estabilizador debido al peso propio ante un posible vuelco de la estructura.

Respecto a la robustez, Gelez, Aubry y Vaudeville (12) afirmaron que los forjados con estructura recíproca presentaban menor robustez que los forjados con estructura de malla debido a que estaban estáticamente determinados. Lo mismo sucede en la estructura recíproca de los arcos del puente, especialmente en el de Leonardo, donde la carga solo tiene un mecanismo de transmisión y si faltase alguno de sus elementos se alcanzaría directamente el colapso de la estructura. Por ello, la colocación de diagonales o tableros que unan los arcos no solamente contribuyen a su estabilidad lateral sino que también mejoran la robustez del conjunto, al proporcionar caminos diferentes para la transmisión de carga.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha analizado el comportamiento mecánico de puentes de madera con estructura recíproca. Para ello se ha realizado un modelo numérico del puente tradicional chino y del puente desmontable de Leonardo. El puente chino trabaja fundamentalmente a compresión mientras que el puente de Leonardo lo hace a flexión y con niveles de agotamiento y deformación mayores bajo la misma carga. El puente chino tiene un comportamiento más cercano al de un arco funicular y es, por tanto, más eficaz desde un punto de vista mecánico, aunque la carga horizontal transmitida a los apoyos es del orden de tres veces mayor. El puente de Leonardo se ajusta mejor a la definición y comportamiento de estructura recíproca, y como tal, todas las barras tienen una jerarquía estructural similar.

Mediante un equilibrio estático de fuerzas se ha estudiado el mecanismo de transmisión de cargas, obteniendo ecuaciones analíticas que permiten averiguar la carga vertical que recibe



cualquier barra de la estructura cuando ésta se ve sometida a una carga puntual aplicada en cualquier punto de la misma.

También se ha analizado la influencia del rozamiento entre piezas en contacto. Cuando no se considera ningún tipo de rozamiento, el puente se comporta como un mecanismo. Cuando el puente trabaja como viga, es necesario considerar el rozamiento para que el modelo converja, pero no existen variaciones de comportamiento apreciables para diferentes valores de rozamiento. Finalmente, cuando el puente trabaja como un arco, un incremento del rozamiento mejora su rigidez y su resistencia, y su comportamiento se acerca más al del puente tradicional chino.

## 6. AGRADECIMIENTOS

El trabajo del modelo real se realizó en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, en el Taller Experimental de Carpintería de Armar. Los autores quisieran mostrar su agradecimiento a los alumnos que han participado en su construcción (Adell, Belardinelli, Berk, Crespo, Fernandez, García, Martín, Martinelli, Matallón, Mauleón, Morgado, Moyano, Ormaeche, Pulupa, Roncelli, Rosok, Saiz, Villalba), así como a la empresa Dlubal Software GmbH por proporcionar su software para esta investigación.

## 7. REFERENCIAS

- (1) Chilton, J. C., Cho, B. C. (1992). Reciprocal frame long span structures. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures. Canadian Society of Civil Engineers. *International Congress on Innovative Large Span Structures*. Montreal, Canada. July, 2, pp. 100 - 109.
- (2) Chilton, J.C., Choo, B.S., Yu, J. (1994). Morphology of Reciprocal Frame Three-Dimensional Grillage Structures. *Spatial, Lattice and Tension Structures*. ASCE. pp. 1065 - 1074.
- (3) Popovic, O., Chilton, J.C., Choo, B.S. (1996). Rapid construction of modular buildings using the reciprocal frame. *Proceedings of the International Conference on Mobile and Rapidly Assembled Structures*. Sevilla, Spain. June, 21, pp. 73 - 82.
- (4) Popovic, O., Chilton, J.C., Choo, B.S. (1996). Sustainable roundwood reciprocal frame structures. *Proceedings of the International Conference Detail Design in Architecture*. Northampton, UK. September.
- (5) Parigi, D., Pugnale, A. (2014). Three-dimensionality in reciprocal structures: concepts and generative rules. *Nexus Network Journal*, 16: 151-177. doi: <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0183-y>.
- (6) Popovic, O. (2014). Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory. *Nexus Network Journal*, 16(1): 119-134. doi: <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0181-0>.
- (7) Popovic, O., Lee, D.S.H. (2014). Reciprocal frame (RF) optimized timber truss structure: a design and build case study. *WIT Transactions on the Built Environment*, 136, pp. 257-266. doi: <https://doi.org/10.2495/MAR140211>.
- (8) Popovic, O. (2008). Reciprocal Frame Architecture. *Architectural Press*, Elsevier. Oxford.
- (9) Chilton, J.C., Devulder, T. (2001). Reciprocal ring structure of the Chapter House roof Lincoln Cathedral, *Conference: Theory Design and Realization of Shell and Spatial Structures, IASS Symposium 2001* At: Nagoya, Japan.
- (10) Kohlhammer, T., Kotnik, T. (2011). Systemic Behaviour of Plane Reciprocal Frame Structures. *Structural Engineering International*, 21(1): 80-86. doi: <https://doi.org/10.2749/101686611X12910257102596>.
- (11) Mesnil R., Douthe C., Baverel O., Gobin T. (2018). Form finding of nexorades using the translations method. *Automation in Construction*, 95: 142-154. doi: <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2018.08.010>.
- (12) Gelez S., Aubry, S., Vaudeville, B. (2011). Behavior of a simple nexorade or reciprocal frame system. *International Journal of Space Structures*, 26(4). doi: <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.331>.
- (13) Cui, Zhou (2018). Un Tratado Chino del Siglo XII: La Construcción Modular en China. Trabajo Fin de Grado, ETSAM, Universidad Politécnica de Madrid. Archivo Digital de la UPM.
- (14) Bertan, F., Foccardi, G. (1998). Architettura Cinese – Il trattato di Li Chieh. *Strenna UTET*.
- (15) Yang, Y. et al. (2007) Timber arch bridges in China. ARCH'07 – 5th International Conference on Arch Bridges, 12-14 sept. Universidade do Minho. ISBN:9789728692315. pp. 171-178.
- (16) Needham, J. (1971). *Science and Civilization in China*. 4(3), Cambridge University Press. ISBN 9780521070607.
- (17) Mao, Yi Sheng (1986). *History of Technique of Archaian Bridges in China*. Beijing: Beijing press.
- (18) Altalba, B. (2000). Re-creating the Rainbow Bridge. *Civil Engineering Magazine*, 70(5):32. ProQuest. <http://worldcat.org/oclc/10480594>
- (19) Di Carlo, B. (2008). The Wooden Roofs of Leonardo and New Structural Research. *Nexus Network Journal*, 10(1). doi: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00004-007-0054-x.pdf>.
- (20) Ceraldi, C., Ermolli, E.R. (2004). Timber arch bridges: a design by Leonardo. *Arch Bridges, ARCH'14*, P. Roca and E. Oñate (Eds), CIMNE, Barcelona.
- (21) Armiño, M. (1984). *Libro de las Maravillas*. Traducción de Mauro Armiño. Anaya, 1984, Madrid ISBN 8475251081.
- (22) Campanelli, A. et al. (2017). *Building of Da Vinci's Self Supporting Bridge*. the Course Mechanics of Rigid Bodies (MCR) at Pontifical Catholic University of Sao Paulo in the Civil Engineering course proposed.
- (23) Poblete, D. (2017). Self-supporting wooden pedestrian bridge was inspired by da Vinci. *Pro Ligno*, 13(4): 645. Online ISSN 2069-7430.
- (24) Tam, M. et al. (2017). Intelligent Fabrication -Digital Bridges. *Footbridge 2017* Berlin- Tell AStory, 6-8.9.2017, Technische Universität Berlin (TU Berlin), 1–11. doi: <https://doi.org/10.24904/footbridge2017.10515>.
- (25) Crespo J., Regueira R., Soilán A., Díez M.R., Guaita, M. (2011). Desarrollo de metodología para la determinación de los coeficientes de fricción estático y dinámico de diferentes especies de madera, CIMAD 11, 1º Congreso Ibero-Latino Americano de la madera en la construcción, Coimbra, Portugal. ISBN 9789899646124.
- (26) Aira, J.R., Arriaga, F., Íñiguez-González, G., Crespo, J. (2014). Static and kinetic friction coefficients of Scots pine (*Pinus sylvestris* L.), parallel and perpendicular to grain direction. *Materiales de Construcción*, 64(315): e030 doi: <https://doi.org/10.3989/mc.2014.03913>.

- (27) UNE-EN 338 (2017). Madera estructural. Clases resistentes. Comité técnico CTN 56 Madera y Corcho. Asociación Española de Normalización.
- (28) Torroja, E. (1996). Razón y ser de los tipos estructurales. 8ª edición. Colección Textos Universitarios, nº 13. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Ciencias la Construcción Eduardo Torroja. Madrid.
- (29) IAP-11. (2011). Instrucción sobre acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera. Gobierno de España. Ministerio de Fomento. Dirección General de Carreteras.